

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $2(1-2i)+i(4+i)=1$, unde $i^2=-1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(3,-3)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+8)=\log_2(8-2x)$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte, cu cifra zecilor pară, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.
- 5p 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $AB=5$, $C=\frac{\pi}{4}$ și înălțimea $AD=4$. Arătați că $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1))=1$.
- 5p b) Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(0)=I_3$.
2. Pe mulțimea $M=[3,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=m(x-3)(y-3)+3$, unde $m\in(0,+\infty)$.
- 5p a) Arătați că $3\circ 5=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.
- 5p b) Pentru $m=2$, arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Se consideră funcția $f:M\rightarrow M$, $f(x)=3+\sqrt{x-3}$. Pentru $m=1$, arătați că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x, y\in M$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{e^{-x}}{x-1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2+xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^3 f(x)(x^2 + 1)^2 dx = 4$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{xf(x)} dx$. Arătați că

$$I_n - I_{n+4} = \frac{2}{(n+2)(n+4)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$